3. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $I = [1, +\infty[$.

4. $f : x \mapsto \tan(\sin x)$, $I = \mathbb{R}$.

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

1. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{1}{10}]$, $0 \leq f'(x) \leq 1.234$.

2. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{1}{10}]$, on a $1 \leq f(x) < 1 + 1.234x$.

3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-8} de $f(0.0000000011)$.

10 Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$ et que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $1 - \frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 1$.

3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-10} de $f(0.0000000002)$.

11 Montrer que $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$, pour tous réels x et y.

12 1. Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \leq \sin y - \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y - x)$, pour tous x et y de $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, $x < y$.

2. En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$.

13 Soit f la fonction définie sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tan x} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Montrer que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $-2 \leq f'(x) \leq -1$.

3. En déduire que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1 - \tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x$.

14 1. a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x \leq \tan x$.

b. En déduire que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

2. a. Montrer que $\frac{y - x}{\cos^2 x} \leq \tan y - \tan x \leq \frac{y - x}{\cos^2 y}$, pour tous réels x et y de $[0, \frac{\pi}{2}[$ tels que $x < y$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x \leq \tan x \leq \frac{x}{\cos^2 x}$.

c. Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$.

3. Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn